**ЛЕВИН Кирилл Львович**

кандидат химических наук, доцент

**ЖУКОВ Виктор Александрович**

доцент

**РЯБОКОНЬ Дарья Владимировна**

старший преподаватель

**КЛИМЕНКОВ Борис Давидович**

преподаватель

ФГКВОУ ВО «Военная орденов Жукова и Ленина Краснознаменная

академия связи имени Маршала Советского Союза С.М. Буденного»

г. Санкт-Петербург

ПРИМЕНЕНИЕ ПОДХОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УПРОЩЕННЫХ ЗАДАЧ ОРБИТАЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ПРИ ВЕДЕНИИ ФИЗИЧЕСКОГО КРУЖКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ МЛАДШИХ КУРСОВ

***Аннотация.*** *Обсуждается задача небесной механики, связанная с одним из случаев орбитального движения в поле потенциальной силы. Рассматривается задача Кеплера, в которой сила направлена по нормали к радиус-вектору на центр масс. Выводятся интегралы движения для постоянной силы и силы потенциального характера. Проводятся аналогии с задачами космического перемещения (ионный двигатель и солнечный парус). Показывается, что для случая потенциальной силы возможно точное решение. Приводится вид этого решения.*

***Ключевые слова:*** *небесная механика, задача Кеплера, интегралы движения, ионный двигатель, солнечный парус.*

**LEVIN Kirill Lvovich**

candidate of chemical sciences, associate professor

**ZHUKOV Viktor Alexandrovich**

associate professor

**RYABOKON Darya Vladimirovna**

senior lecturer

**KLIMENKOV Boris Davidovich**

lecturer

Telecommunication academy named after S.M. Budienny,

St. Petersburg

APPLICATION OF THE APPROACH USING THE LAGRANGE FUNCTION TO SOLVING SIMPLIFIED PROBLEMS OF ORBITAL MECHANICS WHEN KEEPING A PHYSICS CIRCLE FOR JUNIOR STUDENTS

***Annotation.*** *The problem of celestial mechanics related to one of the cases of orbital motion in the field of potential force is discussed. The Kepler problem is considered, in which the force is directed along the normal to the radius-vector to the center of mass. Integrals of motion are derived for a constant force and a potential force. Analogies are drawn with the problems of space movement (ion thruster and solar sail). It is shown that an exact solution is possible for the case of a potential force. The form of this solution is given.*

***Key words:*** *celestial mechanics, Kepler problem, integrals of motion, ion thruster, solar sail.*

Согласно принятой практике, в ВУЗах, где физика не является профильным предметом, преподавание основных законов механики начинается с кинематики, вводящей основные определения движения и связь координаты, скорости и ускорения. Преподавание динамики можно условно соотнести с введением в формулы массы, связывающей движение тел с вызывающим это движение силами. При этом, однако, движение в потенциальном поле, примером которого является поле силы тяжести, в своем описании, как в случае с орбитальным вращением, не требует учета массы вращающегося тела, но вполне справедливо может быть отнесено к предмету изучения динамики. Это вызывает у обучающихся закономерные вопросы, ответ на которые можно легко дать, рассматривая движение в потенциальном поле с помощью функции Лагранжа.

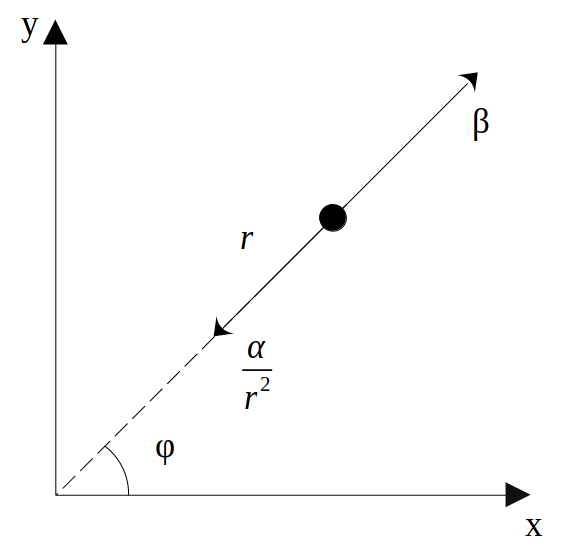
Дополнительным аргументом в пользу рассмотрения практических задач, связанных с использованием функции Лагранжа, является их актуальность при рассмотрении принципов небесной механики, а именно использование в качестве движителя солнечного паруса. Проблематика междупланетных космических перемещений пользуется повышенным интересом у обучающихся, и задачи на заданную тему воспринимаются и решаются аудиторией с неизменным энтузиазмом. Вместе с тем, рассмотрение общих задач небесной механики требует у обучающихся специальных знаний и навыков математического подхода, который еще отсутствует у студентов первых курсов, только приступающих к изучению курса общей физики. В связи с этим целесообразно выбирать упрощенные задачи, которые, с одной стороны, понимаются обучающимися, с другой, являются частными случаями более сложных задач космической механики. Одной из таких задач является задача о рассмотрении движения солнечного паруса под действием силы, вызванной давлением света, которая направлена по радиус вектору от Солнца. Решение такой задачи является асимптотическим в случае, когда поверхность солнечного паруса теряет свои отражающие свойства вследствие, например, эрозии под воздействием солнечного ветра и, следовательно, является практически значимым.

Упомянутая задача является так называемой задачей Кеплера. Отметим, что именно Кеплера можно считать родоначальником идеи солнечного паруса [1,2]. Выдвинутые им идеи впоследствии оказались развитыми западными учеными Максвеллом, Аррениусом, российскими учеными, основателями ракетоплавания Циолковским, Цандлером. Внесли свой вклад в идеи космического паруса писатели Жюль Верн, астронавт Карл Саган, предприниматель Илон Маск. Нет сомнения, что при надлежащем развитии технологий данный тип орбитального перемещения составит весомую конкуренцию ионным и традиционным ракетным двигателям, как это уже произошло в миссии к астероиду.

Рассмотрим решение задачи Кеплера. Будем считать, что потенциальная сила, вводимая в данной задаче, создается солнечным парусом. Под солнечным парусом будем понимать фотонный парус, то есть такой, в котором давление создается за счет передачи импульса фотонов.

Будем рассматривать случай, когда до включения паруса материальная точка (ракета) двигалась по круговой орбите в поле потенциальной силы (гравитации). В момент времени *t* = 0 происходит включение паруса (Рис. 1), давление которого направлено радиально от Солнца, то есть парус расположен под углом 900 к радиус-вектору от Солнца. Поскольку сила потенциальна, ее включение эквивалентно случаю, как если бы масса Солнца при *t* > 0 немного уменьшилась. Понятно, что как в первом (до включения), так и во втором случае движение финитно, то есть происходит по повторяющейся траектории. Если в первом случае, по условию, такой траекторией являлась окружность, то во втором – эллипс.

Для более ясного понимания данной задачи запишем дифференциальные уравнения движения [3,4]. Выберем систему координат, в которой начало координат совпадает с положением Солнца (Рис. 1).

Рис. 1 . Силы, действующие на ракету в начальный момент времени, где – постоянная сила,  – сила притяжения к Солнцу [1]

Для записи дифференциальных уравнений движения в Декартовой системе координат используются формулы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
|  | (2) |

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси *х* и *у*:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3) |
| (4) |

Затем введем параметр

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5) |

где *m* – масса ракеты, *Мc* – масса Солнца, *G* – гравитационная постоянная,  - параметр паруса, характеризующий силу светового давления. Этот параметр зависит от площади паруса и его коэффициента отражения. Более подробное исследование данного параметра не входит в задачи данной публикации.

Подставляя (1), (2) в (3), (4) получаем искомые уравнения движения

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5) |
| (6) |

где

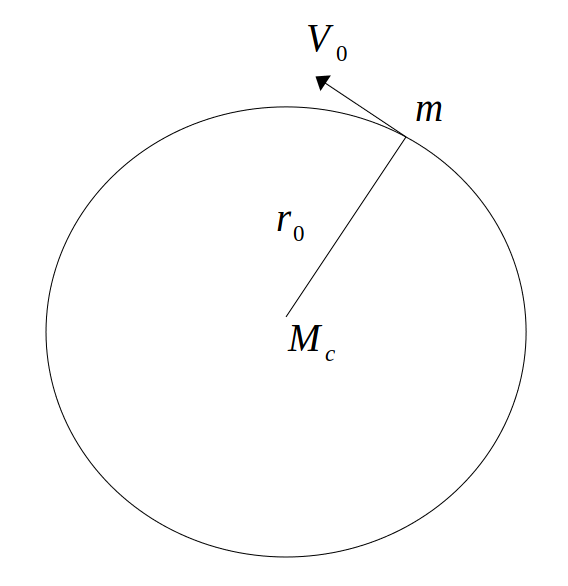
|  |  |
| --- | --- |
| . | (8) |

Отметим, что начальными условиями в этом случае будут:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| , | , | (9) |
| , | . |

Покажем, что решение Кеплеровой задачи является точным.

Найдем параметры круговой траектории, по которой двигалась ракета до включения солнечного паруса [5] (Рис. 2).

Рис. 2. Круговая траектория

Исходя из применения второго закона Ньютона

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

следует, что

|  |  |
| --- | --- |
| . | (11) |

Тогда полная энергия:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (12) |

А момент импульса относительно Солнца:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (13) |

Так как сила давления паруса меньше силы притяжения к Солнцу

|  |  |
| --- | --- |
| , | (14) |

то траектория после включения этой силы остается финитной – траектория является эллипсом.

В полярных координатах уравнение эллипса можно записать как

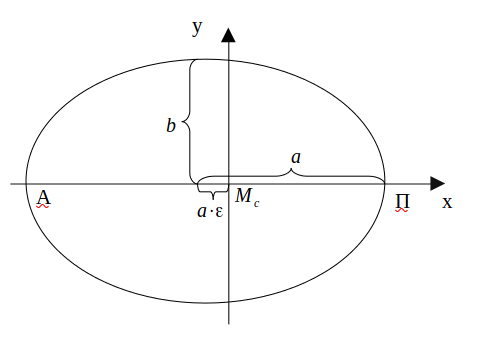
|  |  |
| --- | --- |
| , | (15) |

где *р* – параметр, – эксцентриситет;

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |
|  | (17) |

Длины большой и малой полуосей *a* и *b*, (Рис. 3), соответственно:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |
|  | (19) |

Рис. 3. Эллиптическая орбита: А - афелий, П — перигелий

Фокусное расстояние эллипса:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (20) |

Фокус совпадает с положением Солнца.

Таким образом, траекторией ракеты будет служить выражение:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (8) |

Зависимость *r*(*t*) можно найти в параметрической форме:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (22) |
| , | (23) |

где  - параметр. При *t*=0 точка находится в перигелии, см. рис. 3.

Декартовые координаты выражаются через параметр  посредством формул

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |
|  | (25) |

Таким образом, показывается методологическая целесообразность рассмотрения задачи небесной механики: движения точки в поле потенциальной силы на примере солнечного паруса. Иллюстрируется вывод интеграла движения с учетом момента количества движения и потенциальной энергии. Показывается, что построение траектории в случае решения задачи Лагранжа возможно без решения дифференциальных уравнений движения, а на основании одних только законов сохранения. Обосновывается методологическая ценность данного подхода с точки зрения повышения интереса учащихся к изучению физики.

***Список использованных источников***

1. Движение упругого солнечного паруса по геоцентрической орбите в центральном гравитационном поле / А.С. Попов, Г.А. Щеглов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». – 2006. № 1. – С. 15-23.

2. Задачи управления космическим аппаратом с солнечным парусом / Е.Н. Поляхова, В.С. Королев // Технические науки – от теории к практике. – 2016. № 2(50). – c. 18-31.

3. Мирер, С.А. Механика космического полета. Орбитальное движение // Учебно-методическое пособие М.: Институт прикладной математики им М.В. Келдыша, 2013. – 106 с.

4. Numerical analysis of orbital transfers to Mars using solar sails and attitude control / Pereira M. C. et al. // J. Phys.: Conf. – 2017. Vol. 911. – 012026.

5. Rocha, A. Numerical methods and tolerance analysis for orbit propagation: Master’s degree of science in aerospace engineering / Angel Rocha. - San Jose State University, San Jose, CA, US, 2018. – 42 p.